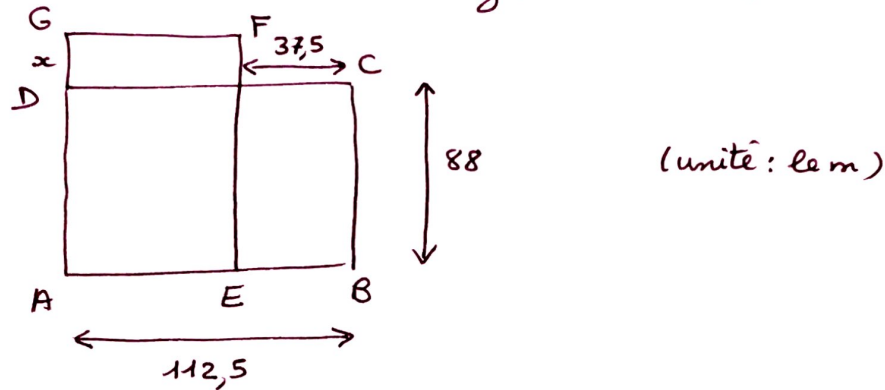


Mises en équation : quelques exemples
rassemblés par Dany-Jack Mercier pour
la préparation de l'oral 2 du CAPES dans
les années 1990.

I Mise en équation à partir de pb géométriques

• 3ème : Brevet Grenoble 91

À l'occasion d'un remembrement en région agricole, on veut échanger le terrain rectangulaire ABCD contre le terrain rectangulaire AEFG :



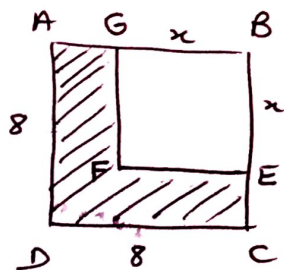
1) Calculer l'aire du terrain ABCD

Calculer l'aire du terrain AEFG en fonction de x

2) L'échange des terrains n'est possible que si les 2 terrains ont la même aire.

Calculer x pour que cette condition soit réalisée.

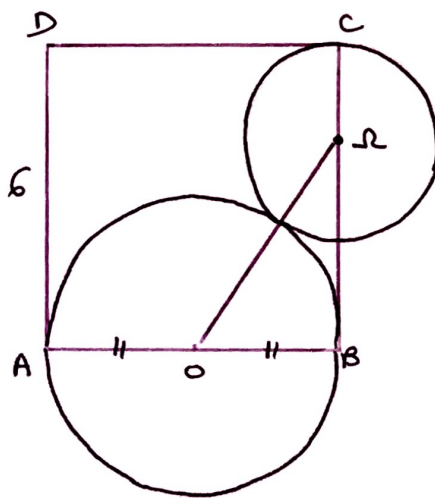
• 3ème : Brevet Limoges 91



1) Déterminer x pour que l'aire de BEFG soit le quart de l'aire de ABCD

2) Trouver x pour que l'aire de BEFG soit égale à l'aire hachurée.

• 2nd : (2nd Fractale 90)

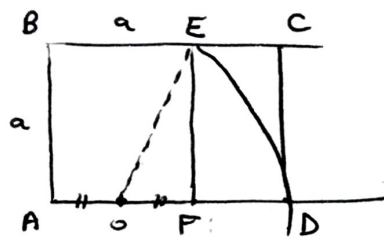


ABCD carré

$R \in [BC]$ O milieu de $[AB]$

Comment choisir R pour que le cercle de centre R et de rayon RC soit tangent au cercle de diamètre $[AB]$?

• 2nd : Rectangle d'a



$$\varphi = \frac{AD}{AB} = \text{nombre d'or}$$

Calculer φ .

Montrer que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

II Problèmes faisant intervenir des fonctions

① Proportionnalité en 5^{ème}

ex 1 :

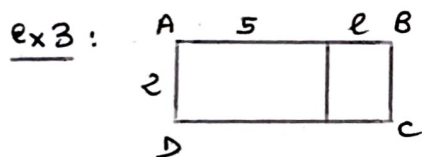
masse (kg)	2,5	3,5	5,5	6,5
prix (F)	7	9,8	15,4	18,2

Fais un graphique représentant ces renseignements (masse en abscisse et prix en ordonnée). Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité? Pourquoi? Recommence avec le tableau : (...)

ex 2 : Voici un tableau de proportionnalité incomplet :

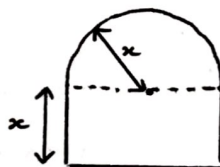
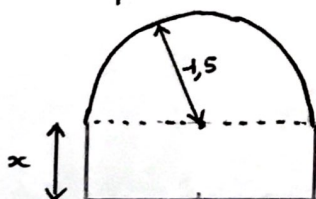
Quantité A	3	5	7	
Quantité B	1,8	3		5,1

- a) Fais un graphique (...) b) Utilise ce graphique pour compléter le tableau.



- a) Exprime en fct de l l'aire du rectangle ABCD
 b) Place sur un graphique en mettant l en abscisse et l'aire S en ordonnée les points obtenus pour $l = 1 ; 2 ; 4$ puis 5. Que dire?

ex 4 : Soire le périmètre des figures ci-dessous en fonction de x , puis trace la représentation graphique en portant x sur l'axe des abscisses et le périmètre p en ordonnée quand x vaut successivement 1, 2, 4 et 6. Que dire?



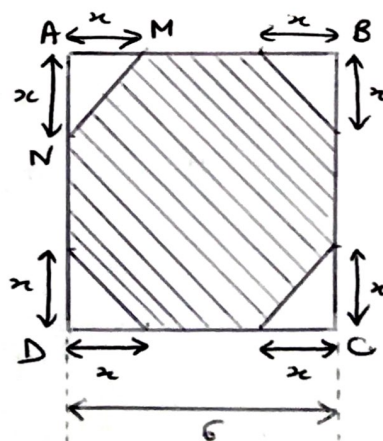
ex 5 : Tracer le graphique de $x \mapsto x^2$ sur papier millimétré. Lire sur le graphique les valeurs de $\sqrt{3}, \sqrt{7,8}, \dots$

② 3^{ème} :

ex 1 : L'unité est le cm. ABCD est un carré de 6 cm de côté.

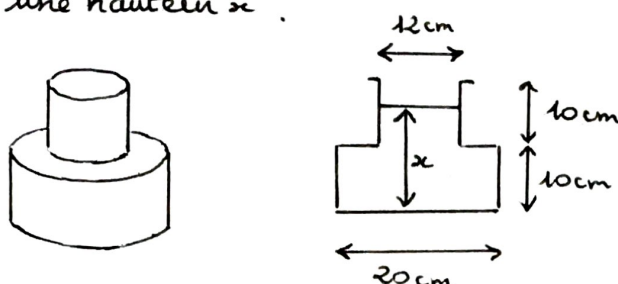
- a) Calculer l'aire du triangle AMN en fct de x
 b) Calculer, en fct de x , l'aire de la partie hachurée
 c) Vérifier que, quand $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$, l'aire de la partie hachurée représente les $\frac{3}{4}$ de l'aire du carré ABCD

(Brevet Nice 01, sept.)



ex2 : Le réservoir

Dans ce réservoir composé de 2 cylindres, on verse un liquide dont le niveau supérieur est à une hauteur x .



- Exprimer le volume du liquide en fct de x (On distinguera 2 cas : $0 \leq x \leq 10$ et $10 < x \leq 20$)
- Représenter graphiquement ce volume (1 cm représentant 1 cm en abscisse, et 1 cm représentant 250 cm^3 en ordonnée)
- Lorsque $x = 10$, peut-on dire que le récipient est plein au $\frac{3}{4}$? (d'après Concours EN Lille 86)

ex3 : Le foyer Socio-Educatif d'un collège organise des séances de ciné-club. Deux formules sont possibles :

formule n°1 : 10 F d'inscription au club et 8 F par séance

formule n°2 : 18 F " " et 6 F "

On désigne par x le nbre de séances auxquelles un spectateur a assisté et par :

A la dépense totale avec la formule 1
B " " " 2

- Déterminer A et B en fct de x .
- Tracer la dte D_1 d'équation $y = 8x + 10$
 D_2 " $y = 6x + 18$ dans un repère orthonormal.
- Expliquer comment ce graphique permet de résoudre le système d'équations :
$$\begin{cases} y = 8x + 10 \\ y = 6x + 18 \end{cases}$$

Préciser le couple solution de ce système, et comparer les formules 1 et 2.

(Brevet Amiens 91, sept.)

④ 1^{ère}

On utilise la dérivée (objectif principal du programme d'analyse en première) pour l'étude des variations d'une fonction et pour résoudre certains problèmes d'optimisation :

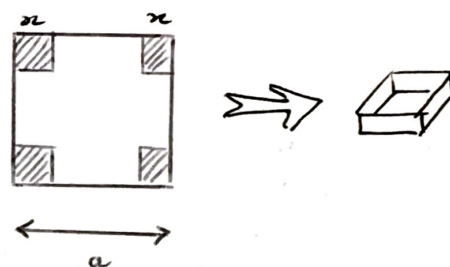
ex1 : Pb des topazes (Le Petit Archimède n° 23)

On admet que les topazes sont des pierres dont la valeur en francs est proportionnelle au carré de leur masse en grammes. Un topaze de 20 g tombe et se casse en 2 morceaux. Combien pourra-t-on retirer au moins de la vente des 2 morceaux ? (Rép. La moitié de la valeur du topaze de 20 g)

ex2 : Pb de la boîte

On construit une boîte en découpant dans chacun des coins d'un carré de a cm de côté, un petit carré de x cm de côté.

Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ? Quel est alors ce volume ?



(Rép. quand $x = \frac{a}{3}$, et la boîte est alors un cube)

ex3 : La variance

$x_1, \dots, x_p$ valeurs d'une série statistique

$n_1, \dots, n_p$ les effectifs respectifs

$$\text{Soit } f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x - x_i)^2 \quad \text{où } N = \sum_{i=1}^p n_i$$

Quel est la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimal ? que vaut alors ce minimum ?

(Rép. $x = \frac{1}{N} \sum n_i x_i = E(x) = \text{espérance de } x = \text{moyenne}$, et $f(x)$ sera alors la variance de cette série statistique).

③ 2nd :

ex1 : Étudier les variations de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$

(On utilise les fcts de références : x^2 croît, donc x^2+1 aussi, et $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît, donc f décroît sur $[0, +\infty[\dots$). Recommencer sur l'intervalle $] -\infty, 0]$, puis dresser le tableau de variations de f .

ex2 : Soit $g:]-\infty, 3[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x-3}$$

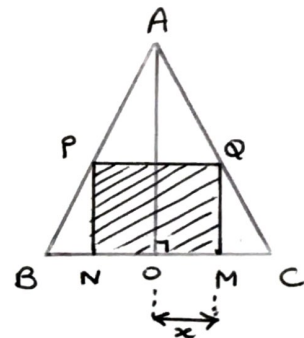
Soient a et b deux nbres tels que $a < b < 3$.

a) Compléter par $<$ ou $>$: Si $a < b < 3$ alors $a-3 \dots b-3$, donc $\frac{1}{a-3} \dots \frac{1}{b-3}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.

b) Dédisez-en le sens de variation de g sur $] -\infty, 3[$.

ex3 : ABC isocèle, $BC=8$
 (OA) hauteur issue de A et $OA=8$

On construit le rectangle $MNPQ$ comme ci-contre :



1) Quand obtient-on un carré ?

a) Exprimer MN en fct de x

b) Calculer QM en fct de x en utilisant le Th. de Thalès

c) Quel valeur de x donnera un carré $MNPQ$?

2) Soit $f(x)$ l'aire du rectangle $MNPQ$ en fct de x .

a) Montrer que $f(x) = 4(4x - x^2)$ où $x \in [0, 4]$.

b) Soient a et b 2 nbres de $[0, 2]$ tels que $a < b$. Calculer $f(b) - f(a)$ et donner son signe. En déduire pour la fct f ?

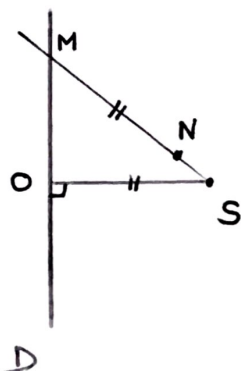
c) Recommencer le b) quand a et b appartiennent à $[2, 4]$.

d) Dresser le tableau de variation de f . Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle est-elle maximale ?

e) Représenter graphiquement la fct f .

⑤ TC

ex1 : Courbe paramétrée (Conchoïde de Nicomède)



Données: $d \in D$, $S \notin D$, O projeté orth. de S sur D
 $OS = 1$

A chaque pt M de la dte D on associe le point N du segment $[MS]$ tel que $MN = OS$.

Chercher l'ensemble des pts N quand M décrit D .

La méthode est proposée : a) Travaillons dans le repère $\overset{\text{orthonormal}}{(O, \vec{i}, \vec{j})}$ où $\vec{j} = \vec{OS}$,
 et nous t le réel tel que $\vec{OM} = t \cdot \vec{j}$. Exprimer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de N
 dans ce repère.

b) Étudier la courbe $t \mapsto N(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

(réf. TC Transmath 87 t1, TP1 p270)

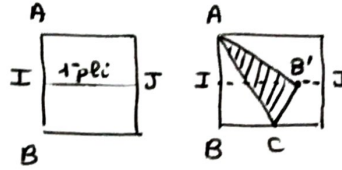
(Sol. : on trouve $N \left(t \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right), \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right)$)

c) Rep. graphique.

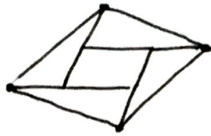
III Problèmes de Géométrie

- 4^{ème} : Pliage (APMEP n°382)

Figures et transformation.



- Problème



à exploiter, la preuve faisant appel à :

- 5^{ème} : sym. centrale
- 3^{ème} : vecteurs
- 4^{ème} : ~~tr. ddm~~ ou rotation

- Exploiter les outils :

- Énoncés traditionnels de géom. plane
- Utilisation des vecteurs
- Utilisation des transformations.
- Utilisation des nbres complexes en géométrie

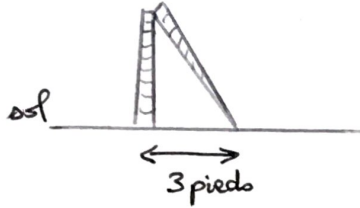
IV Mise en équation à partir de pb concrets

- 3ème : Brevet contenant un système de 2 équ. à 2 inconnues.
- CAP "employé du bâtiment" : Bac à fleurs (cf Cours de 3ème Dan)

V Le Théorème de Pythagore

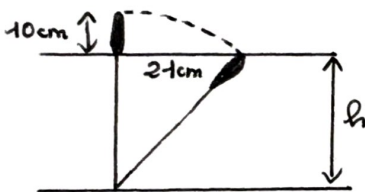
• 4ème : Réseaux et bambous

ex1:



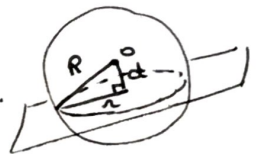
Un bambou est haut d'une toise. Son extrémité se brise et touche le sol à 3 pieds du pied du bambou. Quelle est la hauteur du tronc subsistant ? (1 toise = 10 pieds)

ex2:

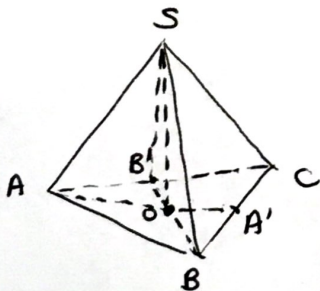


Quelle est la profondeur h de l'étang ?

ex3 : Distance du centre d'une sphère à un plan sécant à cette sphère.



• 3ème : Calculs de longueurs dans une pyramide (But : voir Pythagore dans l'espace)
Relevé, parmi d'autres pyramides, dans le Bordas 3ème (Coll. Durande 89) Act 3 p 58



$SABC$.

$SA = SB = SC = AB = AC = BC = 6 \text{ cm}$

$SABC$ est une pyramide régulière de base le triangle équilatéral ABC , ie un tétraèdre régulier.

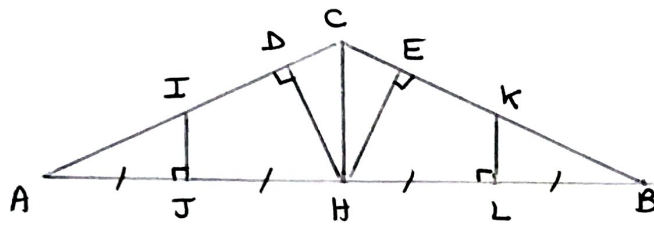
(SO) est perpendiculaire à du plan ABC

O est le cdg du triangle ABC .

Calculer le volume et l'aire totale de cette pyramide.

Indiquer comment la construire (par ex. produire le patron)

• CAP Charpenterie



Charpente

$AB = 12\text{m}$ (entrait)

$AC = 6,5\text{m}$ (arbalétrier)

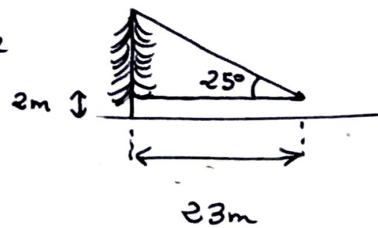
Calculer CH (poinçon)

HD (contre-fiche)

IJ (le lien)

VI Trigonométrie et relations métriques dans le tri. rect.

- 4^{ème} : Hauteur d'un arbre



Quelle est la hauteur de cet arbre ?

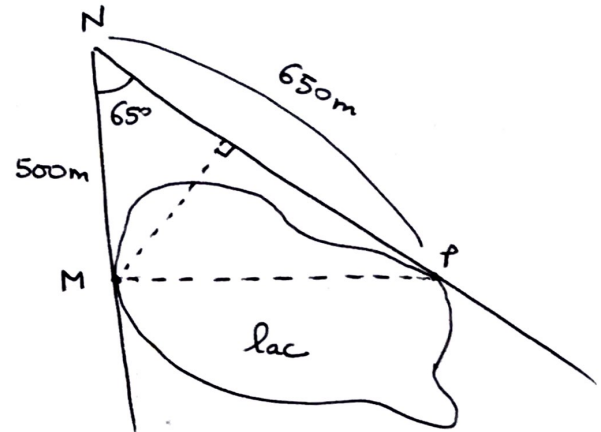
- 3^{ème} : On désire mesurer la longueur MP.

a) En utilisant $\sin 65^\circ \approx 0,91$ et $\cos 65^\circ \approx 0,43$, calculer les distances MH et NH.

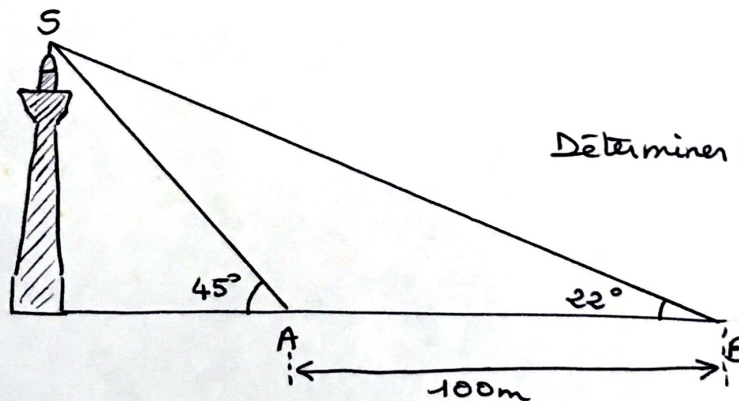
b) En déduire HP

c) Calculer MP^2 puis MP.

(réf. Brevet ; Cours 3^{ème} Dan)



- 2nd : Phare d'Eckmühl (dans le Finistère)

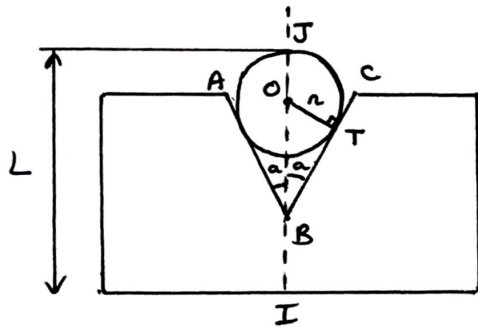


Déterminer la hauteur du phare.

(réf. 2nd Fractale 90, TP1 p331)

- 2nd et BEP (Fractale 2nd 90 , TP 5 p 335 "Technologie")

ex1 : Mesure d'un angle d'entaille



Au pied à coulisse, on mesure $IJ = L$

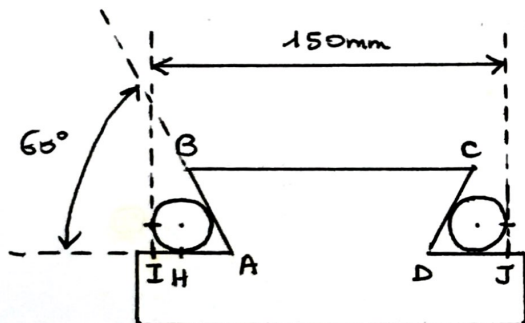
On obtient :

- avec une pique de 20 mm de diam., $L = 80 \text{ mm}$
- " 30 mm, $L = 95 \text{ mm}$

a) En déduire
$$\begin{cases} IB + \frac{10}{\sin a} = 70 \\ IB + \frac{15}{\sin a} = 80 \end{cases}$$

b) Trouver $\sin a$, $\widehat{ABC}$ et IB .

ex2 : Queue d'aronde



Les angles d'entaille mesurent 60° et les piques sont de diamètre 20 mm

Au pied à coulisse, on mesure :

$$IJ = 150 \text{ mm}$$

a) Calculer AH et AI

b) Déduisez-en AD à 1 mm près par défaut.